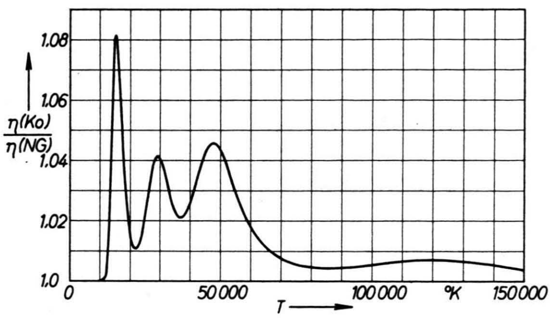

Abb. 5. Quotient der Dichteverhältnisse $\eta\,(\mathrm{Ko})/\eta\,(\mathrm{NG})$ (Korona- zu Nichtgleichgewichts-Gleichung) als Funktion der Elektronen-Temperatur T_{e} in °K für $\vartheta=1$ bei $n_0=3{,}31 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$.

Gleichung berechnet, da diese Gleichung druckunabhängig ist.

Die Aufspaltung des Dichteverhältnisses und der Elektronendichte für verschiedene ϑ läßt besonders im Stoßgeschwindigkeitsbereich $V<1{,}5 \cdot 10^5$ cm/sec Rückschlüsse auf die Ionentemperatur zu, wenn man eine dieser beiden Größen in Abhängigkeit von der Stoßfrontgeschwindigkeit messen kann.

Eine experimentelle Entscheidung, ob das durch sehr starke Stoßwellen erzeugte Plasma mit der Korona- oder der SAHA-Gleichung beschrieben wird, könnte mit der Messung von T_{e} nach erfolgter Relaxation hinter einer Stoßfront bekannter Geschwindigkeit herbeigeführt werden, wie aus den Abb. 1 a und 1 b hervorgeht.

Für Drücke $p_0<1$ Torr treten in den Kurven die schon bekannten Verscheibungen [4–8] ein, was sich hauptsächlich in einer Vergrößerung des Dichteverhältnisses in den Maxima bemerkbar macht.

Der Verlauf von Ionen- und Elektronentemperatur stoßwellengeheizter Plasmen auch im Zusammenhang mit Relaxations- und Strahlungsphänomenen soll in einer folgenden Arbeit behandelt werden.

Herrn STOLZ vom Rechenzentrum der DVL Südwest danke ich für die wertvolle Hilfe bei der Programmierung für die UNIVAC 1107. Den Herren HOPPE und TATTERMUSCH vom DVL-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart, bin ich für die Fertigstellung der Diagramme zu Dank verpflichtet.

Elektronen-Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen für kraftfreie bzw. teilweise kraftfreie Magnetfelder

E. MORATZ * und E. W. RICHTER

Institut für Theoretische Physik und Sternwarte der Universität Kiel

(Z. Naturforschg. **21 a**, 1963—1966 [1966]; eingegangen am 15. August 1966)

Based on the VLASOV equation a method is derived to deliver velocity distributions in the case of a one-component plasma which produces a force-free or in part force-free magnetic field. This formalism is applied to simple fields of the type $\mathfrak{H}=(H_x(z), H_y(z), 0)$.

In der Astrophysik postuliert man gelegentlich die Existenz kraftfreier Magnetfelder. Dies geschieht im allgemeinen dann, wenn ein Magnetfeld bestimmter Stärke nachgewiesen ist, eine Veränderung des Gasdrucks aber zu bislang nicht plausiblen Konsequenzen führen würde. Für solche kraftfreien Magnetfelder nimmt man — meist ohne besondere Erwähnung — ausreichende Stabilität der jeweiligen Konfiguration an. Am Beispiel des von LUNDQUIST [1] angegebenen zylindersymmetrischen Magnetfeldes zeigten VOSLAMBER und CALLEBAUT [2] in magnetohydrodynamischer Näherung unter Verwendung des Energieprinzips von BERNSTEIN u. a., daß kraftfreie Magnetfelder instabil sein können. Die Frage, ob kraftfreie Magnetfelder auch mikroinstabil sein können, wurde u. W. noch nicht diskutiert. Zu dieser Diskussion benötigt man zunächst Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen, die im ungestörten Zustand kraftfreie Magnetfelder erzeugen. Im folgenden wird eine Methode angegeben, die zur Konstruktion solcher Verteilungsfunktionen führt, und zwar bestimmen wir für kraftfreie Magnetfelder bzw. teilweise kraftfreie Magnetfelder vom Typ

$$\mathfrak{H}=(H_x(z), H_y(z), 0) \tag{1}$$

entsprechende Verteilungsfunktionen.

* Am 12. 10. 1966 — nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit — verstarb Herr Dipl.-Phys. E. MORATZ nach kurzer Krankheit.

1 S. LUNDQUIST, Ark. Fysik **2**, 361 [1951].
2 D. VOSLAMBER u. D. K. CALLEBAUT, Phys. Rev. **128**, 2016 [1962].

Spezielle Magnetfeldkonfigurationen

Kraftfreie Magnetfelder $\mathfrak{H}$ sind definiert durch

$$\mathfrak{j} \times \mathfrak{H} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{j} = \frac{\alpha\, c}{4\,\pi}\, \mathfrak{H}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{j}$ die elektrische Stromdichte ist, und der Proportionalitätsfaktor α im allgemeinen orts- und zeitabhängig sein kann. Unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes ergibt sich aus (2)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \alpha\, \mathfrak{H} \tag{3}$$

als Bestimmungsgleichung kraftfreier Magnetfelder (vgl. z. B. RICHTER [3]).

Im folgenden verwenden wir speziell das einfachste nichttrivial kraftfreie Magnetfeld (d. h. $\alpha \neq 0$) der Form (1), nämlich

$$\mathfrak{H} = H(\cos \alpha\, z, \, -\sin \alpha\, z, 0)\, ; \quad (H, \alpha = \text{const}), \tag{4}$$

für ein bis ins Unendliche ausgedehntes Plasma.

Im Anschluß an (4) lassen sich leicht Magnetfelder angeben, die nur in bestimmten Flächen kraftfrei sind, sonst aber (3) nicht erfüllen. Von diesen teilweise kraftfreien Magnetfeldern betrachten wir im folgenden das Feld

$$\mathfrak{H} = A(1, \tanh \gamma\, z, 0)\, ; \quad (A, \gamma = \text{const}) \tag{5}$$

näher, für das $H = A\sqrt{1 + \tanh^2 \gamma\, z}$ und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \left(-\frac{A\,\gamma}{\cosh^2 \gamma\, z}, 0, 0\right) \tag{6}$$

ist. der Vergleich von (5) mit (6) zeigt, daß dieses Feld nur in der Ebene $z = 0$ kraftfrei ist, mit $\alpha = -\gamma$. Zugleich hat die Feldstärke in dieser Ebene ein Minimum.

Verteilungsfunktionen

Als ungestörten Zustand betrachten wir ein unendlich ausgedehntes Elektronenplasma mit positivem Untergrund, in dem ohne elektrische und nichtelektromagnetische Felder nur ein Magnetfeld auf Grund eines Elektronenstroms existiert. Für diesen Zustand suchen wir Elektronen-Verteilungsfunktionen, die zumindest für solche Zeiten möglich sein sollen, die klein gegenüber der mittleren Stoßzeit der Elektronen sind. Diese Verteilungsfunktionen $f_0(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})$ müssen der VLASOV-Gleichung

$$\mathfrak{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{r}} - \frac{e}{m\, c}\, (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{v}} = 0 \tag{7}$$

genügen ($e > 0$), wobei das Magnetfeld durch

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\,\pi}{c}\, \mathfrak{j} = -\frac{4\,\pi\, e}{c} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{v}\, f_0(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})\, \mathrm{d}^3 v \tag{8}$$

mit f_0 verkoppelt ist.

Für kraftfreie Magnetfelder geht (8) wegen (3) in

$$\mathfrak{H} = -\frac{4\,\pi\, e}{\alpha\, c} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{v}\, f_0\, \mathrm{d}^3 v \tag{9}$$

über. Magnetfelder der Form (1) lassen nach (8) bzw. (9) nur Verteilungsfunktionen vom Typ $f_0 = f_0(z, \mathfrak{v})$ zu, so daß (7) dann

$$v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{e}{m\, c} \left[-v_z H_y(z) \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + v_z H_x(z) \frac{\partial f_0}{\partial v_y} + (v_x H_y(z) - v_y H_x(z)) \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] = 0 \tag{10}$$

lautet. Diese, für vorgegebenes $\mathfrak{H}$ lineare partielle Differentialgleichung besitzt die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = v_z; \quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{m\, c}\, v_z H_y; \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{e}{m\, c}\, v_z H_x; \quad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{m\, c}\, (v_y H_x - v_x H_y),$$

woraus sich als Integralbasis

$$\psi_1 = v^2; \quad \psi_2 = v_x - (e/m\, c) \int H_y\, \mathrm{d}z; \quad \psi_3 = v_y + (e/m\, c) \int H_x\, \mathrm{d}z \quad \text{ergibt.} \tag{11}$$

Demnach haben die Lösungen von (10) die Form $f_0(z, \mathfrak{v}) = f_0(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. (12)

a) Speziell für das kraftfreie Magnetfeld (4) liefert (12) mit (11)

$$f_0(z, \mathfrak{v}) = f_0(v^2, v_x - (\omega_c/\alpha) \cos \alpha\, z, v_y + (\omega_c/\alpha) \sin \alpha\, z)\,, \tag{13}$$

wobei $\omega_c = e\, H/m\, c$ die Gyrationsfrequenz der Elektronen ist. Die für (4) möglichen Verteilungsfunktionen müssen noch mit (9) verträglich sein, also

$$H_i = -\frac{4\,\pi\, e}{\alpha\, c} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_i\, f_0\, \mathrm{d}^3 v \qquad (i = x, y) \tag{14}$$

[3] E. W. RICHTER, Z. Phys. **159**, 194 [1960].

erfüllen, während $\int_{-\infty}^{+\infty} v_z f_0 \, d^3 v = 0$ von (13) ohnehin erfüllt wird. Die beiden Gleichungen (14) lassen sich zusammenfassen, wenn die Transformation

$$v_{\parallel} = v_x \cos \alpha z - v_y \sin \alpha z; \quad v_{\perp 1} = v_x \sin \alpha z + v_y \cos \alpha z; \quad v_{\perp 2} = v_z \tag{15}$$

ausgeführt wird. Dann folgt

$$\frac{\alpha H c}{4 \pi e} = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\parallel} f_0 \, d^3 v, \tag{16}$$

wobei $d^3 v = dv_{\parallel} \, dv_{\perp 1} \, dv_{\perp 2}$ und

$$f_0 = f_0\{v_{\parallel}^2 + v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2, \, (v_{\parallel} - \omega_c/\alpha) \cos \alpha z + v_{\perp 1} \sin \alpha z, \, -(v_{\parallel} - \omega_c/\alpha) \sin \alpha z + v_{\perp 1} \cos \alpha z\} \quad \text{ist.} \tag{17}$$

Ein kraftfreies Magnetfeld kann in einem Elektronenplasma sicher nur dann einige Stoßzeiten lang erhalten bleiben, wenn die das Magnetfeld erzeugende Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum einer verschobenen MAXWELL-Verteilung möglichst gut angepaßt ist. Eine entsprechende Auswahl aus der nach (17) zugelassenen Funktionsklasse führt auf e-Funktionen, die in (16) u. a. zu Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_{\parallel} \exp\{-p v_{\parallel}^2 + 2 q v_{\parallel}\} \, dv_{\parallel} = (q/p) \sqrt{\pi/p} \exp\{q^2/p\}, \, (p > 0) \tag{18}$$

Anlaß geben. Wie die linke Seite von (16), muß dann auch die rechte Seite von (18) unabhängig von z sein. Die einfachste e-Funktion, die diese Forderung für die nach (17) verlangte Abhängigkeit erfüllt, ergibt sich wegen

$$[(v_{\parallel} - \omega_c/\alpha) \cos \alpha z + v_{\perp 1} \sin \alpha z]^2 + [-(v_{\parallel} - \omega_c/\alpha) \sin \alpha z + v_{\perp 1} \cos \alpha z]^2 = (v_{\parallel} - \omega_c/\alpha)^2 + v_{\perp 1}^2$$

zu

$$f_0 = K \exp\{-a(v_{\parallel}^2 + v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2) - b(v_{\parallel} - \omega_c/\alpha)^2 - b v_{\perp 1}^2\},$$

bzw. mit $a + b = p$ zu

$$f_0 = C \exp\left\{-p\left[\left(v_{\parallel} + \frac{\omega_c}{\alpha} \frac{a-p}{p}\right)^2 + v_{\perp 1}^2\right] - a v_{\perp 2}^2\right\}. \tag{19}$$

Da einerseits $n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \, d^3 v$ die Elektronendichte ergibt und andererseits

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_{\parallel} \exp\{-p v_{\parallel}^2 + 2 q v_{\parallel}\} \, dv_{\parallel} = (q/p) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-p v_{\parallel}^2 + 2 q v_{\parallel}\} \, dv_{\parallel} \tag{20}$$

gilt, folgt nun mit $\omega_p{}^2 = 4 \pi n e^2/m$ aus (16) die Beziehung

$$\alpha = \pm (\omega_p/c) \sqrt{a/p - 1}, \quad \text{bzw. für } p = m/(2 k T_1) \text{ und } a = m/(2 k T_2)$$

schließlich

$$\alpha = \pm (\omega_p/c) \sqrt{T_1/T_2 - 1} = \pm 1{,}88 \cdot 10^{-6} \sqrt{n(T_1/T_2 - 1)} \text{ cm}^{-1}. \tag{21}$$

Hieraus ergibt sich, daß $T_1 \geqq T_2$ sein muß, wobei für nichttrivial kraftfreie Magnetfelder (d. h. $\alpha \neq 0$) der Form (4) offenbar $T_1 > T_2$ *notwendig* ist, wenn sie durch die Verteilungsfunktion (19) erzeugt werden sollen. Hierbei ist zu beachten, daß T_1 und T_2 *nicht* dem $T_{\parallel}$ bzw. $T_{\perp}$ einer verschobenen Bi-MAXWELL-Verteilung entsprechen, denn nach (19) ergeben sich im Geschwindigkeitsraum in Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{H}$ aus $p v_{\perp 1}^2 + a v_{\perp 2}^2 = \text{const}$ für $a > p$ Ellipsen.

In der Verteilungsfunktion (19) läßt sich der Term

$$\bar{v} = (\omega_c/\alpha)(a/p - 1) = \pm \sqrt{T_1/T_2 - 1} \, (\omega_c/\omega_p) \, c = \pm 313 \sqrt{T_1/T_2 - 1} \, H c/\sqrt{n} \text{ cm/sec} \tag{22}$$

als mittlere Elektronengeschwindigkeit in Magnetfeldrichtung (für $\alpha < 0$) bzw. in entgegengesetzter Richtung (für $\alpha > 0$) deuten. Diese zur Erzeugung von (4) benötigte Geschwindigkeit ist nach (22) um so kleiner, je geringer die Anisotropie der Verteilungsfunktion (19) ist.

b) Für den Fall des nur in der Ebene $z = 0$ kraftfreien Magnetfeldes (5) liefert (12) mit (11)

$$f_0(z, \mathfrak{v}) = f_0(v^2, v_x - (e A/m c \gamma) \ln(\cosh \gamma z), v_y + (e A/m c) z). \tag{23}$$

Die möglichen Verteilungsfunktionen müssen außerdem mit (8) verträglich sein, d. h. mit

$$\frac{\gamma A}{\cosh^2 \gamma z} = \frac{4 \pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f_0 \, d^3 v; \quad 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_y f_0 \, d^3 v = \int_{-\infty}^{+\infty} v_z f_0 \, d^3 v. \tag{24}$$

Die zweite Gleichung wird sicher erfüllt, wenn $f_0(v_y) = f_0(-v_y)$ ist. Für beliebige z-Werte ist diese Forderung nur erfüllbar, wenn die Verteilungsfunktion (23) *nicht* von $v_y + (e\,A/m\,c)\,z$ abhängt.

Die erste Gleichung von (24) diskutieren wir [wie im Beispiel a)] unter der Zusatzannahme, daß die gesuchte Verteilungsfunktion einer verschobenen MAXWELL-Verteilung möglichst ähnlich sein soll. Deshalb setzen wir im Einklang mit (23) an:

$$f_0(z, \mathfrak{v}) = K \exp\{-a\,v^2 - b[v_x - (e\,A/m\,c\,\gamma)\ln(\cosh\gamma z)]\},$$

bzw.

$$f_0(z, \mathfrak{v}) = C(\cosh\gamma z)^{eAb/mc\gamma} \exp\{-a[(v_x + b/2\,a)^2 + v_y^2 + v_z^2]\}. \tag{25}$$

Mit dieser Verteilungsfunktion läßt sich (24) nur erfüllen, wenn $e\,A\,b/m\,c\,\gamma = -2$, d. h.

$$\gamma = -\tfrac{1}{2}\,b\,\omega_{c0} \tag{26}$$

ist, wobei

$$\omega_{c0} = e\,A/m\,c = e\,H(z=0)/m\,c$$

die Gyrationsfrequenz der Elektronen für die Ebene $z=0$ angibt. In (25) kann

$$\bar{v} = -\frac{b}{2\,a} = \frac{\gamma}{\omega_{c0}}\,\frac{2\,k\,T}{m} = 5{,}75\cdot 10^{-7}\,\frac{\gamma}{H(z=0)}\,c\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \tag{27}$$

als mittlere Elektronengeschwindigkeit in x-Richtung interpretiert werden, wobei wir $a = m/2\,k\,T$ gesetzt haben. Die Verteilungsfunktion (25) ist für einen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e}_x$ bewegten Beobachter im Geschwindigkeitsraum isotrop. Wegen (20) liefert die erste Gleichung von (24) für (25) schließlich

$$n = A^2/(8\,\pi\,k\,T\cosh^2\gamma z), \tag{28}$$

also eine ortsabhängige Elektronendichte, die ihr Maximum in der Ebene minimaler Feldstärke hat $(z=0)$ und für $z\to\infty$ nach Null geht.

Diskussion

Die im Beispiel a) betrachtete Verteilungsfunktion (19) kann ein nichttrivial kraftfreies Magnetfeld der Form (4) nur erzeugen, wenn die Geschwindigkeitsverteilung anisotrop ist. Allerdings ist diese Anisotropie im allgemeinen für eine vorgegebene Skalengröße α nicht sehr ausgeprägt. Nach (21) genügt z. B. für $\alpha = 0{,}1\ \text{cm}^{-1}$ (d. h. für ein Feld der Form (4) mit der Periode ≈ 60 cm) und $n = 10^{14}\ \text{cm}^{-3}$ eine Anisotropie $(T_1 - T_2)/T_2 \approx 2{,}5\cdot 10^{-5}$. Die gleiche Anisotropie ergibt sich für $\alpha = 1\ \text{km}^{-1}$, wenn $n = 10^{12}\ \text{cm}^{-3}$ ist. Im Anschluß an BERNSTEIN [4] ist für die Verteilungsfunktion (19) eine Aussage über lineare exponentielle Instabilität prinzipiell möglich [da für (4) $H = \text{const}$ gilt], im einzelnen aber sehr mühsam. Wir weisen hier lediglich darauf hin, daß SHIMA und HALL [5] für eine Bi-MAXWELL-Verteilung bezüglich elektrostatischer Störungen Stabilität fanden, wenn $T_{\parallel} > \tfrac{1}{2}T_{\perp}$ ist. Die aus (21) folgende Bedingung $T_1 > T_2$ ist deshalb vermutlich günstig für die Stabilität der Verteilungsfunktion (19).

Das im Beispiel b) betrachtete Magnetfeld der Form (5) kann von der isotropen Verteilungsfunktion (25) erzeugt werden. Der Exponent dieser Funktion läßt sich durch die Transformation

$$v_{\parallel} = \frac{1}{H}(H_x v_x + H_y v_y),$$

$$v_{\perp 1} = \frac{1}{H}(H_x v_y - H_y v_x), \quad v_{\perp 2} = v_z$$

umformen. Dann ist nämlich

$$(v_x - \bar{v})^2 + v_y^2 + v_z^2 = \left(v_{\parallel} - \bar{v}\,\frac{A}{H}\right)^2 + \left(v_{\perp 1} + \bar{v}\,\frac{A}{H}\tanh\gamma z\right)^2 + v_{\perp 2}^2,$$

so daß die mittlere Elektronengeschwindigkeit eine Komponente quer zum Magnetfeld besitzt, ausgenommen die Ebene $z=0$. Demnach existiert für einen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e}_x$ bewegten Beobachter auch im ungestörten Zustand ein elektrisches Feld

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + (1/c)\,(\bar{\mathfrak{v}}\times\mathfrak{B}) = (\bar{v}/c)\,A\tanh\gamma z\,\mathfrak{e}_z,$$

wobei wegen $\mathfrak{E} = 0$ zugleich

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - (1/c)\,(\bar{\mathfrak{v}}\times\mathfrak{E}) = \mathfrak{B} \quad \text{ist.}$$

Einerseits wegen dieses Feldes $\mathfrak{E}' \neq 0$ und andererseits wegen der Abhängigkeit des Magnetfeldes (5) $H = H(z)$ lassen sich die Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung für isotrope Geschwindigkeitsverteilungen von BERNSTEIN [4], HARRIS [6] u. a. nicht auf die Verteilungsfunktion (25) anwenden. Sowohl für die Verteilungsfunktion (19) als auch für (25) sind somit weitere Stabilitätsuntersuchungen nötig.

[4] J. B. BERNSTEIN, Phys. Rev. **109**, 10 [1958].
[5] Y. SHIMA u. L. S. HALL, Phys. Rev. **139** A 1115 [1965].
[6] E. G. HARRIS, J. Nucl. Energy **C 2**, 138 [1961].